

# 一种改进的三边定位算法

高莉<sup>1</sup>, 杨雪苗<sup>2</sup>

(1. 江苏师范大学 电气工程及自动化学院, 江苏 徐州 221116;

2. 中国矿业大学 信息与控制工程学院, 江苏 徐州 221116)



扫码移动阅读

**摘要:**针对基于加权最小二乘(WLS)的三边定位算法在线性化过程中损失定位信息的问题,提出了一种改进的三边定位算法。该算法利用WLS算法粗略估计未知节点的坐标,并利用损失的定位信息构建定位模型,通过求解该定位模型实现精确定位。仿真结果表明,与基于WLS的三边定位算法相比,该算法有效提高了定位精度,且巷道长宽比越大,定位性能越好。

**关键词:**煤矿井下定位;精确定位;三边定位;测距定位;加权最小二乘

中图分类号:TD655 文献标志码:A

## An improved trilateration positioning algorithm

GAO Li<sup>1</sup>, YANG Xuemiao<sup>2</sup>

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China;

2. School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that trilateration positioning algorithm based on weighted least squares (WLS) lost positioning information in linearization process, an improved trilateration positioning algorithm was proposed. In the algorithm, WLS algorithm is used to roughly estimate coordinates of unknown nodes, and lost positioning information is used to construct positioning model, so precise positioning is achieved by solving the positioning model. The simulation results show that positioning accuracy of the proposed algorithm is obviously higher than that of the trilateration positioning algorithm based on WLS, and the larger the length-width ratio of roadway is, the better the positioning performance of the proposed algorithm is.

**Key words:** coal mine underground positioning; precise positioning; trilateration positioning; range positioning; weighted least squares

## 0 引言

目前,煤矿井下定位功能主要依托无线网络来实现<sup>[1]</sup>。由于无线网络中节点成本高、能耗大,在满足定位精度要求的情况下,从经济效益角度考虑,不适合在井下布置太多的节点作为定位系统的参考节点。三边定位算法能根据3个已知坐标的参考节点到未知节点的距离来确定未知节点的坐标<sup>[2-4]</sup>,对参考节点数量需求低,能较好地满足煤矿井下定位系

统经济性需求。理想的三边定位算法中,以参考节点坐标为圆心、参考节点到未知节点的测量距离为半径,可得3条相交于一点的圆曲线,未知节点坐标为3条圆曲线的交点。然而,受噪声、多径效应等因素影响,测量距离不可避免存在误差,导致3条圆曲线不会相交于一点,所以需要求解由3个圆曲线方程所构成的非线性方程组。

文献[5]采用非线性最小二乘(Nonlinear Least Squares, NLS)算法直接求解非线性方程组,其核心

收稿日期:2019-12-12;修回日期:2020-01-04;责任编辑:盛男。

基金项目:江苏省现代教育技术研究课题(2016-R-47695);徐州市科技计划项目(KC18006)。

作者简介:高莉(1976-),女,上海人,副教授,博士,主要研究方向为无线传感器网络、图像处理,E-mail:gaoli@jsnu.edu.cn。

引用格式:高莉,杨雪苗.一种改进的三边定位算法[J].工矿自动化,2020,46(2):78-81.

GAO Li, YANG Xuemiao. An improved trilateration positioning algorithm[J]. Industry and Mine Automation, 2020, 46(2): 78-81.

思想是利用类似高斯-牛顿法的搜索法来寻找代价函数的极小值,定位精度较高,但计算复杂度高,并且需要选择合适的初始值以避免发生局部收敛。文献[6-9]通过泰勒级数展开使非线性方程组在某组初始参数估计值附近线性化,降低了计算复杂度,但仍需要合适的初始值以保证收敛,且由于线性化过程中忽略了高阶项,无法保证得到最优解。文献[10-14]利用线性最小二乘(Linear Least Squares, LLS)算法将非线性方程组转化为线性方程组,之后通过最小二乘(Least Squares, LS)算法求解线性方程组,避免了初始值选择问题,但未考虑测距误差对定位结果的影响。文献[15]提出的加权最小二乘(Weighted Least Squares, WLS)算法根据测距误差赋予方程组中每个等式不同权值,提高了定位精度,但由于非线性方程组线性化过程会带来定位信息损失,定位精度还有提升空间。

本文提出了一种改进的三边定位算法。该算法以WLS算法估计的未知节点坐标为基础,融合线性化过程中所损失的定位信息,构建定位模型,通过求解该定位模型实现精确定位。

## 1 基于WLS的三边定位算法

假设二维平面分布3个参考节点,第 $i(i=1, 2, 3)$ 个参考节点坐标为 $(x_i, y_i)$ ,未知节点坐标为 $(x, y)$ ,未知节点到第 $i$ 个参考节点的测量距离为 $r_i$ ,则有

$$\begin{cases} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r_1 \\ (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 = r_2 \\ (x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 = r_3 \end{cases} \quad (1)$$

式(1)是一个非线性方程组,以第1个等式作为参考等式,通过其余等式减去参考等式的方法消除二次项,将式(1)转换为线性方程组,可得

$$(x_i - x_1)x + (y_i - y_1)y = \frac{1}{2}(r_1 - x_1 - y_1 - r_i + x_i + y_i) \quad i=2, 3 \quad (2)$$

将式(2)写成矩阵形式:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b} \quad (3)$$

$$\text{式中: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_1 - r_2 - x_1 - y_1 + x_2 + y_2 \\ r_1 - r_3 - x_1 - y_1 + x_3 + y_3 \end{bmatrix}。$$

根据LLS算法,未知节点的LLS估计坐标为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LLS}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} (\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (4)$$

在LLS算法求解式(3)的过程中,是将式(3)的2个等式按相同权重处理。然而实际中由于测距误

差随机,每个等式对定位结果的影响不同。针对该问题,WLS算法引入权重矩阵 $\mathbf{W}$ 来提高定位精度,则未知节点的WLS估计坐标为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{WLS}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} (\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b})^T \mathbf{W} (\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{b} \quad (5)$$

权重矩阵 $\mathbf{W}$ 可利用 $\mathbf{b}$ 的协方差矩阵 $\mathbf{C}$ 的逆来构建<sup>[15]</sup>:

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}^{-1} \quad (6)$$

假设测量距离 $r_i$ 之间相互独立,可得

$$\mathbf{C} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \operatorname{var}(r_1) + \operatorname{var}(r_2) & \operatorname{var}(r_1) \\ \operatorname{var}(r_1) & \operatorname{var}(r_1) + \operatorname{var}(r_3) \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中 $\operatorname{var}(\cdot)$ 为方差函数。

由于噪声、多径效应等因素影响,实际测量中不可避免地存在误差,则有

$$r_i = d_i + n_i \quad (8)$$

式中: $d_i$ 为未知节点到第 $i$ 个参考节点的真实距离; $n_i$ 为测距误差。

假设测距误差 $n_i$ 服从均值为0、方差为 $\sigma_i$ 的高斯分布,即 $n_i \sim N(0, \sigma_i)$ ,则测量距离 $r_i \sim N(d_i, \sigma_i)$ 。运用非中心卡方分布的方差,可得

$$\operatorname{var}(r_i) = 4d_i\sigma_i + 2\sigma_i \quad (9)$$

则式(7)可表示为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) & d_1\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_1 \\ d_1\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_1 & d_1\sigma_1 + d_3\sigma_3 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \end{bmatrix} \quad (10)$$

由式(10)可知,权重矩阵中包含真实距离,然而实际计算中真实距离不可知,因此利用测量距离代替真实距离来构造权重矩阵。

基于WLS的三边定位算法在线性化过程中存在定位信息损失情况,具体如下。

展开并整理式(1),可得

$$\begin{cases} -x_1x - y_1y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(r_1 - x_1 - y_1) \\ -x_2x - y_2y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(r_2 - x_2 - y_2) \\ -x_3x - y_3y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(r_3 - x_3 - y_3) \end{cases} \quad (11)$$

将式(11)写成矩阵形式,并进行初等行变换,可得

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_1 - x_1 - y_1 - r_2 + x_2 + y_2 \\ r_1 - x_1 - y_1 - r_3 + x_3 + y_3 \\ r_1 - x_1 - y_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

对比式(12)和式(3)可看出,基于 WLS 的三边定位算法利用非线性方程组中 1 个等式作为线性化工具,将非线性方程组转化为线性方程组的同时,将作为线性化工具的等式的信息弱化,并未有效利用所有等式的信息,损失了部分定位信息,定位精度有待进一步提升。

### 2 改进的三边定位算法

改进的三边定位算法在基于 WLS 的三边定位算法求得初步定位结果的基础上,利用损失的定位信息构建定位模型:

$$\min_{\theta} [\|\theta - \hat{\theta}_{WLS}\|_2^2 + (\|\theta_1 - \theta\|_2^2 - r_1)^2] \quad (13)$$

$(\|\theta_1 - \theta\|_2^2 - r_1)^2$  为线性化过程中损失的定位信息,其中  $\theta_1 = [x_1 \ y_1]^T$ 。

改进的三边定位算法步骤如下。

(1) 获取未知节点和参考节点之间的测量距离  $r_i$ 。

(2) 将参考节点坐标  $(x_i, y_i)$  和测量距离  $r_i$  代入式(3),计算矩阵  $A$  和  $b$ 。

(3) 将测量距离  $r_i$  替代  $d_i$  并代入式(10),计算协方差矩阵  $C$ ,然后利用式(6)计算权重矩阵  $W$ 。

(4) 将矩阵  $A, b, W$  代入式(5),得到未知节点的 WLS 估计坐标  $\hat{\theta}_{WLS}$ 。

(5) 利用步骤(4)得到的结果及基于 WLS 的三边定位算法损失的定位信息,构建定位模型(式(13))。

(6) 根据式(13)求解未知节点坐标。

### 3 仿真分析

仿真区域部署如图 1 所示,区域长 100 m、宽 5 m,布置 3 个参考节点和 10 个未知节点,参考节点坐标分别为  $(-50, 0), (0, 5), (50, 0)$ ,未知节点 1—10 随机分布。在测距误差标准差为 2 m、仿真 1 000 次的情况下,基于 WLS 的三边定位算法与本文算法的仿真定位结果如图 2 所示。可看出基于 WLS 的三边定位算法平均定位误差为 17.7 m,本文算法平均定位误差为 7.9 m,本文算法的定位精度高于基于 WLS 的三边定位算法。

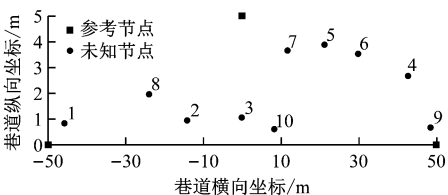


图 1 仿真区域部署

Fig. 1 Simulation area deployment

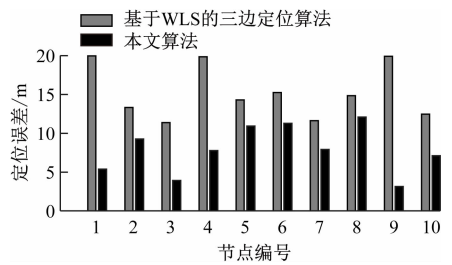


图 2 不同位置定位结果

Fig. 2 Positioning results at different locations

基于上述仿真区域及参考节点坐标部署,设置未知节点坐标为  $(-30, 4)$ ,测距误差标准差在 0~10 m 之间均匀取值,经过 1 000 次仿真,基于 WLS 的三边定位算法与本文算法的均方误差 (Mean Square Error, MSE) 如图 3 所示。可看出在测距误差标准差较小时,2 种算法的 MSE 曲线接近;随着测距误差标准差增大, MSE 均呈递增趋势,但本文算法的 MSE 更小,表明定位精度更高。这是由于测距误差标准差较小时,补偿的定位信息作用小,测距误差标准差较大时,定位信息的丢失对定位精度影响较大,而本文算法有效利用了丢失的定位信息。

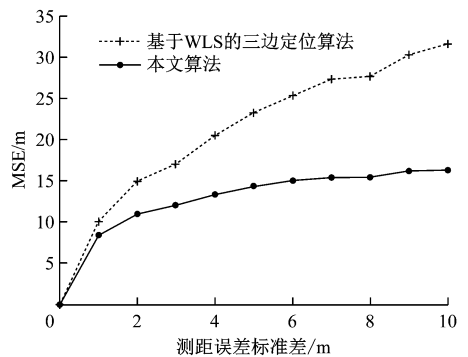


图 3 不同测距误差标准差下 MSE

Fig. 3 MSE under different ranging error standard deviations

设置 2 种仿真区域及节点坐标:① 仿真区域长 50 m、宽 5 m,参考节点坐标分别为  $(-25, 0), (0, 5), (25, 0)$ ,未知节点之间横向、纵向间隔均为 2 m。② 仿真区域及参考节点坐标同图 1,未知节点之间横向间隔为 4 m、纵向间隔为 0.2 m。给定测距误差标准差为 1 m,仿真区域内各未知节点测试 200 次,基于 WLS 的三边定位算法与本文算法的均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE) 差值如图 4 所示。可看出在仿真区域几何中心点附近, RMSE 差值较小,表明本文算法的定位精度虽有提升但不明显;距离中心点较远处,特别是左右两侧区域, RMSE 差值较大,表明本文算法的定位精度明显提升。对比图 4(a)和图 4(b)可看出,在相同噪声情况下,仿真区域长宽比越大,本文算法的定位性能越好。

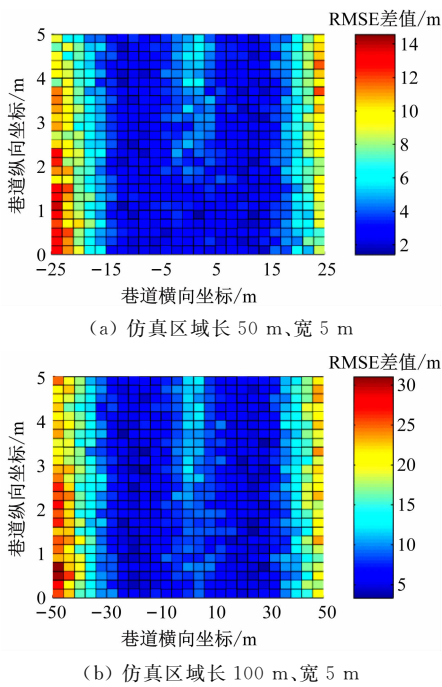


图 4 不同仿真区域下 RMSE 差值

Fig. 4 RMSE differences under different simulation areas

#### 4 结语

改进的三边定位算法通过 WLS 算法粗略估计未知节点坐标,并利用损失的定位信息构建定位模型,通过求解该定位模型实现精确定位。仿真结果表明,该算法定位误差小于基于 WLS 的三边定位算法,定位精度得到明显提升,且巷道长宽比越大,定位性能越好。

#### 参考文献 (References):

[1] 赵彤,李先圣,张雷,等.煤矿井下节点合作加权质心定位算法[J].工矿自动化,2018,44(8):32-38.  
ZHAO Tong, LI Xiansheng, ZHANG Lei, et al. Weighted centroid localization algorithm based on node cooperation in coal mine underground [J]. Industry and Mine Automation, 2018, 44(8): 32-38.

[2] KHALAJMEHRABADI A, AKOPIAN D, PACK D. Range-based trilateration using multipurpose cost function optimization with Lagrangian multipliers [C]//IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, Savannah, 2016: 2153-3598.

[3] YANG Zheng, LIU Yunhao. Quality of trilateration: confidence-based iterative localization [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2010, 21(5): 631-640.

[4] LI Zeyuan. Constrained weighted least squares location algorithm using received signal strength measurements [J]. China Communications, 2016, 13(4): 81-88.

[5] GUSTAFSSON F. Mobile positioning using wireless networks: possibilities and fundamental limitations

based on available wireless network measurements [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2005, 22(4): 41-53.

[6] 房嘉奇,冯大政,李进. TDOA 中的修正牛顿及泰勒级数方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2016, 43(6): 27-33.  
FANG Jiaqi, FENG Dazheng, LI Jin, et al. Research on modified newton and taylor-series methods in TDOA [J]. Journal of Xidian University, 2016, 43(6): 27-33.

[7] 张会清,石晓伟,邓贵华,等. 基于 BP 神经网络和泰勒级数的室内定位算法研究[J]. 电子学报, 2012, 40(9): 1876-1879.  
ZHANG Huiqing, SHI Xiaowei, DENG Guihua, et al. Research on indoor location technology based on back propagation neural network and taylor series [J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(9): 1876-1879.

[8] 齐小刚,袁列萍,刘立芳. 误差修正的声源目标混合定位算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2019, 46(1): 1-7.  
QI Xiaogang, YUAN Lieping, LIU Lifang. Hybrid location algorithm for the acoustic source based on error correction [J]. Journal of Xidian University, 2019, 46(1): 1-7.

[9] STEFANSKI J, SADOWSKI J. TDOA versus ATDOA for wide area multilateration system [J]. EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, 2018: 1-13.

[10] CUI Xunxue, YU Kegen, LU Songsheng. Approximate closed-form TDOA-based estimator for acoustic direction finding via constrained optimization [J]. IEEE Sensors Journal, 2018, 18(8): 3360-3371.

[11] GUVENC I, GEZICI S, SAHINOGLU Z. Fundamental limits and improved algorithms for linear least-squares wireless position estimation [J]. Wireless Communications and Mobile Computing, 2012, 12(12): 1037-1052.

[12] SALMAN N, KEMP A H, GHOGHO M. Low complexity joint estimation of location and path-loss exponent [J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2012, 1(4): 364-367.

[13] 邢智鹏,李春文,陆思聪. 基于 LQI 滤波与联合参数估计的井下人员定位算法[J]. 煤炭学报, 2017, 42(6): 1628-1633.  
XING Zhipeng, LI Chunwen, LU Sicong. Coal mine underground personnel localization algorithm based on LQI filter and joint parameters estimation [J]. Journal of China Coal Society, 2017, 42(6): 1628-1633.

[14] KUMAR V, ARABLOUEI R, DE HOOG F, et al. Pseudo-linear localization using perturbed RSSI measurements and inaccurate anchor positions [J]. Pervasive and Mobile Computing, 2019, 52: 46-59.

[15] PAULA T, BERNARDOS A M, CASAR J R. Weighted least squares techniques for improved received signal strength based localization [J]. Sensors, 2011, 11(9): 8569-8592.